3.1. Conceptos

Anualidad. Conjunto de pagos realizados a intervalos iguales de tiempo; es decir, todo pago con un importe constante, hecho en intervalos regulares, aun por periodos menores a un año.

Intervalo o periodo de pago. Tiempo que transcurre entre un pago y otro.

Plazo de una anualidad. Tiempo que pasa entre el inicio del primer periodo de pago y el final del último.

Renta (R). Pago periódico.

CLASIFICACIÓN DE LAS ANUALIDADES

Por su tiempo

a. *Ciertas.* Aquellas cuya percepción o pago se estipula en términos precisos; sus fechas son fijas y se establecen de antemano.
b. *Contingentes o eventuales.* Aquellas donde el principio de la percepción, o fin de la serie de pagos, es impreciso y depende de un acontecimiento fortuito. En otras palabras, la fecha del primer pago o del último, o ambas; no se acuerdan de antemano.

POR EL VENCIMIENTO DE SUS PAGOS

a. *Vencidas u ordinarias.* Aquellas en que cada uno de los pagos se hace al final de cada periodo durante el tiempo total del plazo del problema.
b. *Anticipadas.* Aquellas que se pagan al principio de cada periodo, durante el tiempo de percepción.

Por su iniciación

a. *Inmediatas.* Las encontramos cuando la realización de los cobros o pagos se hace en el periodo inmediatamente siguiente a la formalización del acuerdo.
b. *Diferidas.* Aquellas en donde el principio de la serie de pagos se difiere; es decir, cuando la primera anualidad vence después del transcurso de uno o varios periodos, lo que hace que ese lapso sea mayor al intervalo que separa a cada anualidad.

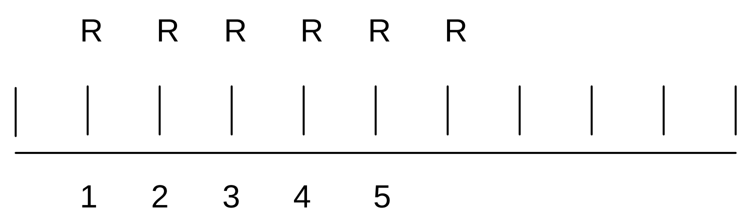
Por sus intereses

a. *Simples.* Aquellas en las que el periodo de pago coincide con el de capitalización de los intereses.
b. *Generales.* Aquellas en que no coinciden periodo de capitalización y de pago.

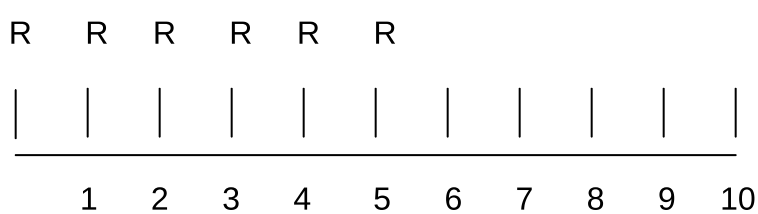
Considerando que las anualidades pueden ser simples o generales, éstas, a su vez, pueden clasificarse en ciertas y eventuales.

Ciertas

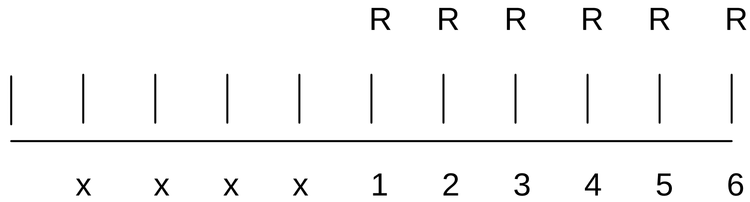
a. Vencidas



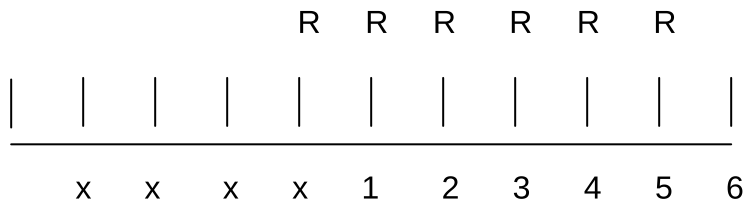
b. Anticipadas



c. Vencidas y diferidas



d. Anticipadas y diferidas



Las anualidades eventuales o contingentes contienen los mismos grupos que las anualidades ciertas.

Finalmente, para estudiar las anualidades, y tomando en cuenta su clasificación, en cada caso, se deberán resolver los problemas siguientes:

a. Determinar el monto (*M*) o valor actual (*C*) de una serie de anualidades.
b. Establecer el valor de la anualidad (renta = *R*) en la etapa del monto o del valor actual.
c. Precisar la tasa (*i*) en función del monto o del valor actual.
d. Determinar el tiempo (*n*) en los problemas de monto y de valor actual (más el tiempo diferido, cuando se trate de esta clase de anualidades).

Es muy importante señalar que –lo mismo que en el interés compuesto, en donde las variables *n* (números de pagos) e *i* (tasa de interés), se expresan en la misma medida de tiempo– en las anualidades se agrega una variable, la renta (*R*), que debe estar en la misma medida de tiempo.

3.2. Anualidades vencidas

3.2.1. Monto de una anualidad ordinaria

El monto de las anualidades ordinarias o vencidas es la suma de los montos de todas y cada una de las rentas que se realizan hasta el momento de hacer la última de las mismas.

Ejercicio 32. Una persona decide depositar $5,000.00 al fin de cada mes, en una institución financiera que le abonará intereses del 12% convertible mensualmente: el 1% mensual, durante 6 meses. Se pide calcular y conocer el monto que se llegue a acumular al final del plazo indicado.

CONCEPTO	CANTIDAD
Depósito al final del primer mes	$5,000.00
Intereses por el segundo mes (5000 x 0.01)	50.00
Suma	5,050.00
Depósito al final del segundo mes	5,000.00
Monto al final del segundo mes	10,050.00
Intereses por el tercer mes (10050 x 0.01)	100.50
Depósito al final del tercer mes	5,000.00
Monto al final del tercer mes	15,150.50
Intereses por el cuarto mes (15150.50 x 0.01)	151.51
Depósito al final del cuarto mes	5,000.00
Monto al final del cuarto mes	20,302.01
Intereses por el quinto mes (20302.01 x 0.01)	203.02
Depósito al final del quinto mes	5,000.00
Monto al final del quinto mes	25,505.03
Intereses por el sexto mes (25505.03 x 0.01)	255.05
Depósito al final del sexto mes	5,000.00
Monto final (al término del sexto mes)	$30,760.08

Ahora bien, si el monto total es igual a la suma de los montos de cada anualidad, llegaremos al mismo resultado:

5 Monto de la primera renta: 5,000 (1.01)	$5,255.05
4 Monto de la primera renta: 5,000 (1.01)	$5,203.02
3 Monto de la tercera renta: 5,000 (1.01)	$5,151.51
2 Monto de la tercera renta: 5,000 (1.01)	$5,100.50
Monto de la quinta renta: 5,000 (1.01)	$5,050.00
Sexta renta	$5,000.00
Monto	$30,760.08

CÁLCULO DEL MONTO

Cuando el tiempo no es de consideración, el cálculo del monto puede hacerse conforme a cualquiera de los procedimientos descritos. Pero cuando no hay esa condición (o bien, cuando se quiere calcular la renta, tasa o tiempo; o en su caso, resolver el problema con mayor facilidad y rapidez), es necesario deducir y utilizar la fórmula del monto.

Sabiendo que el monto de una serie de anualidades es igual a la suma del monto de cada una de ellas, se utiliza esta fórmula:

$$\left[\qquad\qquad\right]^{n}$$

$$M = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(31)$$

Y si aplicamos la fórmula anterior a los datos del problema anterior, tenemos:

$$M = 5000 \left[\frac{(1 + 0.01)^6 - 1}{0.01} \right] = \$\ 30{,}760.08$$

3.2.1.1. Cálculo de la renta

Si partimos de la fórmula del monto de una anualidad ordinaria:

$$M = R \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$ Pasamos R al 1er. miembro: $$\frac{M}{R} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

De donde: $$\frac{R}{M} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Finalmente:

$$R = \frac{M * i}{(1 + i)^n - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(32)$$

Ejercicio 33. ¿Cuál es la renta mensual que se requiere para obtener $30,760.08 durante 6 meses si se invierte con el 12% capitalizable mensualmente?

Seguimos con los datos de nuestro ejemplo:

M = $30,760.08
i = 12% capitalizable mensualmente = 0.12/12 = 0.01
n = 6 meses
R = ? mensual
R = $ 5,000.00 mensuales

$$R = \frac{30760.08 * 0.01}{(1 + 0.01)^{6} - 1}$$

3.2.1.2. Cálculo del tiempo plazo

Nuevamente, partimos de la fórmula del monto de anualidades ordinarias:

$$M = R\,\frac{(1 + i)^{n} - 1}{i}$$

Pasando *R* e *i* al 1er. miembro:

$$\frac{Mi}{R} = (1 + i)^{n} - 1$$

Pasamos ahora el –1 al 1er. miembro:

$$\frac{Mi}{R} + 1 = (1 + i)^{n}$$

Entonces: $n \log (1 + i) = \log\left(\frac{\mathbf{Mi}}{\mathbf{R}} + 1\right)$

Y queda:

$$n = \frac{\log\left(\frac{Mi}{R} + 1\right)}{\log(1+i)} \qquad (33)$$

Apliquemos la fórmula anterior en el ejercicio siguiente.

Ejercicio 34. ¿Cuántos pagos deben realizarse para llegar a acumular $30,760.08 si se depositan $5,000.00 mensuales, con una tasa de interés del 12% compuesto mensual?

M = $30,760.08
R = $5,000.00 mensuales
i = 12% compuesto mensual = 0.12/12 = 0.01 mensual
n = ? meses

$$n = \frac{\log\left(\frac{30760.08 * 0.01}{5000} + 1\right)}{\log(1 + 0.01)} = 6 \text{ mensualidades}$$

3.2.1.3. Cálculo de la tasa

Considerando que el monto de anualidades ordinarias se determina de la manera siguiente:

n *n*

$$M = R\,\frac{(1 + i) - 1}{i} \qquad \text{Pasando } R \text{ al 1er. miembro:} \qquad \frac{M}{R} = \frac{(1 + i) - 1}{i}$$

y si tratáramos de despejar *i*, nuestra ecuación contendría la incógnita en ambos miembros, lo que carece de propósito. En estas condiciones, se deja la fórmula en la última exposición anotada. El primer miembro tendrá un factor –el cociente de dividir el monto (*M*) entre la renta (*R*)– que debe ser igual al factor resultante del segundo miembro de la ecuación. El primer miembro de la ecuación se refiere a valores conocidos, pero en el segundo miembro se ha de buscar una tasa que, al sustituirla en el mismo, nos proporcione un factor igual al del primer miembro de la ecuación. En caso de encontrar exactamente el factor, la tasa es la que encierra el mismo; de lo contrario, procedemos a hacer la interpolación.

En el procedimiento de interpolación, se hace lo siguiente:

a. Probar valores en la expresión donde se localiza la tasa de interés (*i*), es decir, el segundo miembro de la ecuación, hasta encontrar dos factores de la misma que estén cercanos al factor del primer miembro de la ecuación, uno mayor y otro menor.
b. Después de haber encontrado los dos factores, se hace la interpolación.

Para una mejor comprensión, se muestra en un diagrama lo que se quiere encontrar:

Factor de tasa mayor	Factor de tasa buscada	Factor de tasa menor
Tasa mayor	Tasa ? buscada	Tasa menor

La interpolación se calcula de la manera siguiente:

a. Se obtiene la distancia del factor de la tasa buscada menos el factor de la tasa mayor.
b. Se determina la distancia total del factor de la tasa menor menos el factor de la tasa mayor.
c. Se divide la distancia del punto (a) entre la distancia total del punto (b).
d. El resultado representa la proporción que guarda el numerador respecto del denominador.
e. Se repiten los pasos a, b y c, aplicándolos a las tasas, de lo que resulta la proporción entre las mismas.
f. La tasa que se busca se encontrará igualando el porcentaje del paso (d) con la razón del paso (e).
g. La tasa se determinará despejando la incógnita, que será la tasa buscada, la cual nos dará una mejor aproximación al factor del segundo miembro de la ecuación.

Este procedimiento se resume en la siguiente fórmula:

$$\frac{\textit{Factor de la tasa buscada} - \textit{Factor de la tasa mayor}}{\textit{Factor de la tasa menor} - \textit{Factor de la tasa mayor}} = \frac{\textit{Tasa buscada} - \textit{Tasa mayor}}{\textit{Tasa menor} - \textit{Tasa mayor}}$$

O bien:

$$\frac{Ftx - FtM}{Ftm - FtM} = \frac{tx - tM}{tm - tM} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(34)$$

Donde:

F = Factor

t = tasa

M = mayor

m = menor

Apliquemos este cálculo en el ejercicio siguiente.

Ejercicio 35. ¿A qué tasa (i) se aplicó una serie de 6 pagos mensuales (n) de \$5,000.00 (R) cada uno, para acumular, al final de los mismos, \$30,760.08 (M)?

M = \$30,760.08

n = 6 meses

R = \$ 5,000.00 mensuales

i = ? mensual

Nuestra ecuación:

$$\frac{M}{\mathbf{R}} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{\mathbf{i}}$$

$$\text{Queda:} \quad \frac{30760.08}{5000} = \frac{(1+i)^{6} - 1}{i} \longrightarrow 6.152016 = \frac{(1+i)^{6} - 1}{i}$$

Considerando que en nuestro problema hay una tasa exacta (0.01), en el ejemplo, consideraremos una tasa mayor y una menor a la tasa del ejercicio.

Factor objetivo del primer miembro = 6.152016

Luego, probamos las tasas:

TASA	OPERACIÓN	FACTOR
0.005	$\dfrac{(1.005)^{6} - 1}{0.005}$	6.075502
0.008	$\dfrac{(1.008)^{6} - 1}{0.008}$	6.121288
0.012	$\dfrac{(1.012)^{6} - 1}{0.012}$	6.182906
0.015	$\dfrac{(1.015)^{6} - 1}{0.015}$	6.229551

Los factores –un poco mayor y un poco menor al factor de la tasa buscada– con sus respectivas tasas son:

Tasa = Factor

0.008 = 6.121288

? = 6.1520

0.012 = 6.182906

Lo anterior, en forma de diagrama, nos queda:

6.121288	6.152016	6.182906
0.008	?	0.012

Con nuestra fórmula de interpolación:

$$\frac{\textit{Factor de la tasa buscada} - \textit{Factor de la tasa mayor}}{\textit{Factor de la tasa menor} - \textit{Factor de la tasa mayor}} = \frac{\textit{Tasa buscada} - \textit{Tasa mayor}}{\textit{Tasa menor} - \textit{Tasa mayor}}$$

$$\frac{6.152016 - 6.182906}{6.121288 - 6.182906} = \frac{i - 0.012}{0.008 - 0.012}$$

$$\frac{-0.030890}{-0.061618} = \frac{I - 0.012}{-0.004} \longrightarrow 0.501315 = \frac{i - 0.012}{-0.004}$$

$$\longrightarrow 0.501315\,(-0.004) = i - 0.012 \longrightarrow -0.002005 = i - 0.012$$

$$\longrightarrow -0.002005 + 0.012 = i \longrightarrow 0.009995 = i$$

Así, la tasa que buscamos es de 0.01(por el redondeo de cifras).

El segundo miembro de la ecuación nos debe dar el mismo valor del factor del primer miembro de la ecuación. Comprobemos:

$$6.152016 = \frac{(1 + i)^{6} - 1}{i} \quad \longrightarrow \quad 6.152016 = \frac{(1.01)^{6} - 1}{0.01}$$

$$\longrightarrow \quad 6.152016 = 6.152015$$

Se trata prácticamente del mismo resultado.

3.2.2. Valor actual de una anualidad ordinaria (*C*)

Cuando la época del cálculo coincide con la iniciación de la serie de pagos o rentas, el valor equivalente de la serie es actual. El lapso que transcurre entre la fecha de la entrega del valor actual y el vencimiento de la primera anualidad será igual a cada periodo que separa a las demás rentas.

El valor presente o actual de las anualidades ordinarias se puede presentar en alguna de estas dos modalidades:

a. Como el descuento de una serie de anualidades, que vencen escalonadamente y están separadas por intervalos iguales de tiempo.
b. Como la determinación de un capital que, invertido a interés, proporciona una serie de rentas futuras.

Ejercicio 36. Se tienen seis pagarés, con vencimientos escalonados en forma cuatrimestral, cada uno de $25,000.00, y se quieren liquidar, el día de hoy, siendo una tasa del 6% cuatrimestral.

Determinemos el valor actual o presente de cada documento:

OPERACIÓN	RESULTADO
1era. renta $[25000(1.06)^{-1}]$	$23,584.91
2da. renta $[25000(1.06)^{-2}]$	$22,249.91
3ra. renta $[25000(1.06)^{-3}]$	$20,990.48
4a. renta $[25000(1.06)^{-4}]$	$19,802.34
5a. Renta $[25000(1.06)^{-5}]$	$18,681.45
6a. Renta $[25000(1.06)^{-6}]$	$17,624.01
VALOR ACTUAL TOTAL	$122,933.10

Ahora bien, ¿qué cantidad habrá que invertir al 6% cuatrimestral, para tener derecho a recibir seis rentas de $25,000.00 cada una? Conforme a la resolución anterior, se sabe que el valor actual es de $122,933.10. Comprobemos si con el importe de seis pagos de $25,000.00 cada uno el deudor salda su cuenta.

Capital invertido	$122,933.10
Intereses del 1er. cuatrimestre (0.06)	$7,375.98
Suma	$130,309.08
Menos el pago de la 1a. renta	$25,000.00

Saldo al final del 1er. cuatrimestre	$105,309.08
Intereses del saldo (0.06)	$6,318.55
Suma	$111,627.63
Menos el pago de la 2a. renta	$25,000.00
Saldo al final del 2o. cuatrimestre	$86,627.63
Intereses del saldo (0.06)	$5,197.65
Suma	$91,825.28
Menos el pago de la 3a. renta	$25,000.00
Saldo al final del 3er. cuatrimestre	$66,825.28
Intereses del saldo (0.06)	$4,009.52
Suma	$70,834.80
Menos el pago de la 4a. renta	$25,000.00
Saldo al final del 4o. cuatrimestre	$45,834.80
Intereses del saldo (0.06)	$2,750.09
Suma	$48,584.89
Menos el pago de la 5a. renta	$25,000.00
Saldo al final del 5o. cuatrimestre	$23,584.89
Intereses del saldo (0.06)	$1,415.09
Suma	$24,999.98
Menos el pago de la 6a. renta	$25,000.00
SALDO FINAL	$ –0.02*

* Por el redondeo de cifras

Dado lo anterior, se debe encontrar el valor actual de cada pago para determinar el valor presente total de la serie de rentas. Podemos decir que el valor actual es igual a la suma de los valores actuales de cada renta.

En este caso, se utiliza la fórmula siguiente:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]\text{..}(35)$$

Si sustituimos en la fórmula los datos de nuestro problema, tenemos:

$$C = 25000\left[\frac{1-(1.06)^{-6}}{0.06}\right] = \$122{,}933.10$$

3.2.2.1. Cálculo de la renta

Si partimos de la fórmula que proporciona el valor actual de anualidades ordinarias:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \Rightarrow \frac{C}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow \frac{R}{C} = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

tenemos:

$$R = \frac{C\,i}{1-(1+i)^{-n}}\text{..}(36)$$

Ejemplifiquemos la fórmula de la renta (*R*) con el ejercicio siguiente.

Ejercicio 37. ¿Qué cantidad se debe pagar cada cuatro meses (*R*) para liquidar una deuda de $122,933.10 (*C*) en 6 pagos (*n*), si se utiliza una tasa del 24% convertible cuatrimestralmente (*i*)?

C = $122,933.10

i = 24% convertible cuatrimestralmente = 0.24 /4 = 0.06 cuatrimestral

n = 6 cuatrimestres

R = ? cuatrimestral

$$R = \frac{122933.10 * 0.06}{1 - (1 + 0)^{-6}} = \$25{,}000.00$$

3.2.2.2. Cálculo del tiempo

De la fórmula de valor actual de anualidades ordinarias se determina el tiempo:

$$C = R\,\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \longrightarrow \frac{C}{R} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \longrightarrow \frac{Ci}{R} = 1 - (1 + i)^{-n}$$

Luego, se cambian los signos:

$$\frac{Ci}{R} - 1 = -(1 + i)^{-n} \longrightarrow 1 - \frac{Ci}{R} = (1 + i)^{-n}$$

Se puede escribir así: Y se buscan los valores

inversos:

$$1 - \frac{Ci}{R} = \frac{1}{(1+i)^n} \qquad \frac{1}{1 - \frac{Ci}{R}} = (1+i)^n$$

Posteriormente, se aplican logaritmos:

$$\log 1 - \log\left(1 - \frac{Ci}{R}\right) = n \log(1+i)$$

Lo que da:

$$\frac{-\log\left(1 - \frac{Ci}{R}\right)}{\log(1+i)} = n \quad \text{...(37)}$$

A continuación, apliquemos la fórmula del tiempo (*n*) a partir del valor actual (*C*).

Ejercicio 38. ¿En cuántos pagos (*n*) se liquidará una deuda de $122,933.10 (*C*) con pagos cuatrimestrales de $25,000.00 (*R*), si se impone una tasa de interés del 24% capitalizable cuatrimestralmente?

C = $122,933.10
i = 24% convertible cuatrimestralmente = 0.24 /4 = 0.06 cuatrimestral
R = $25,000.00 cuatrimestral
n = ? cuatrimestres

$$n = -\frac{\log\left[1 - \frac{122933.10 * 0.06}{25000}\right]}{\log(1 + 0.06)} = -\frac{-0.151835179}{0.025305865}$$

n = 6 cuatrimestres

3.2.2.3. Cálculo de la tasa

La fórmula para calcular el valor actual de las anualidades ordinarias es:

$$C = R\,\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Al pasar *R* al primer miembro:

$$\frac{C}{R} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Como en el caso del monto de las anualidades ordinarias, al calcular la tasa, se sigue el procedimiento de interpolación que se vio en ese tema.

Ejercicio 39. ¿A qué tasa cuatrimestral se aplicó una deuda de $122,933.10 (*C*) que se liquidó en 6 pagos (*n*) cuatrimestrales de $25,000.00 (*R*) cada uno?

C = $122,933.10
i = ? cuatrimestral

R = $25,000.00 cuatrimestral

n = 6 cuatrimestres

$$\frac{C}{} = \frac{1 - (1 + i)}{}$$

R *i*

Sustituyendo:

–n

–n

122933.1 *1 – (1 + i)* *1 – (1 + i)*

------------- = *--------------* *4.917324* = *---------------*

25000 *i*

Luego, se prueban las tasas:

TASA	SUSTITUCIÓN	FACTOR
	–n 1 – (1 + i) ---------------- i	
0.05	- 6 1 – (1 + 0.05) -------------------- 0.05	5.075692
0.055	–6 1 – (1 + 0.055) --------------------- 0.055	4.995530
0.065	–6 1 – (1 + 0.065) --------------------- 0.065	4.841014

0.07	$\dfrac{1-(1+0.07)^{-6}}{0.07}$	4.766540

En diagrama, queda así:

```
4.841014                          4.917324                          4.995530
   |________________________________|________________________________|
|                                 |                                 |
 0.065                            ?                                 0.055
```

Luego, con la fórmula de interpolación:

$$\frac{\textit{Factor de la tasa buscada} - \textit{Factor de la tasa mayor}}{\textit{Factor de la tasa menor} - \textit{Factor de la tasa mayor}} = \frac{\textit{Tasa buscada} - \textit{Tasa mayor}}{\textit{Tasa menor} - \textit{Tasa mayor}}$$

$$\frac{4.917324 - 4.841014}{4.995530 - 4.841014} = \frac{i - 0.065}{0.055 - 0.065}$$

$$\frac{0.076310}{0.154516} = \frac{i - 0.065}{-0.010} \Longrightarrow 0.493865 = \frac{i - 0.065}{-0.010}$$

$$\rightarrow 0.493865\,(-0.010) = i - 0.065 \rightarrow -0.004939 = i - 0.065$$

$$\rightarrow -0.004939 + 0.065 = i \rightarrow 0.060061 = i$$

Así, la tasa que buscamos es de 0.06 (por el redondeo de cifras). Y si la sustituimos en el segundo miembro de la ecuación nos debe dar el mismo valor del factor del primer miembro de la ecuación. Comprobemos:

$$4.917324 = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \rightarrow 4.917324 = \frac{1-(1.06)^{-6}}{0.06}$$

$$4.917324 = 4.917324$$

3.3. Anualidades anticipadas

A diferencia de las anualidades vencidas –que se pagan al final de cada periodo–, las anticipadas se cubren al comienzo de cada periodo.

```
Ordinarias:              R      R      R      R      R
                   |______|______|______|______|______|
                   |      |      |      |      |      |
Anticipadas:       R      R      R      R      R
```

En las anualidades ordinarias, la primera anualidad se paga al final del periodo, mientras que en las anticipadas se realiza al comenzar el mismo. Por eso, el pago de la última renta ordinaria coincide con la terminación del plazo de tiempo estipulado en la operación, esto hace que no produzca intereses y que su inversión se haga solamente como complemento del monto de las rentas. En tanto, en las anualidades anticipadas, la última renta se paga al principio del último periodo: sí produce intereses.

Cálculo del monto

La fórmula del monto de las anualidades anticipadas es:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(42)}$$

Ejercicio 40. Si se hacen 6 depósitos trimestrales anticipados (*n*) de $25,000.00 cada uno (*R*), con una tasa del 20% capitalizable trimestralmente (*i*), ¿cuál es el monto (*M*)?

R = $25,000.00 trimestrales
i = 20% capitalizable trimestralmente = 0.20/4 = 0.05 trimestral
n = 6 trimestres
M =

a. Aritméticamente

1ª. renta (principio del primer trimestre)	$25,000.00
Intereses por el primer trimestre	1,250.00
2ª. renta (principio del segundo trimestre)	25,000.00
Monto al final del primer trimestre	51,250.00
Intereses por el segundo trimestre	2,562.50
3ª. renta (principio del tercer trimestre)	25,000.00
Monto al final del segundo trimestre	78,812.50
Intereses por el tercer trimestre	3,940.63
4ª. renta (principio del cuarto trimestre)	25,000.00
Monto al final del tercer trimestre	107,753.13
Intereses por el cuarto trimestre	5,387.65
5ª. renta (principio del quinto trimestre)	25,000.00

Monto al final del cuarto trimestre	138,140.78
Intereses por el quinto trimestre	6,907.04
6ª. renta (principio del sexto trimestre)	25,000.00
Monto al final del quinto trimestre	170,047.82
Intereses por el sexto trimestre	8,502.39
Monto al final del sexto trimestre	$178,550.21

b. Por fórmula

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}\right] \longrightarrow M = R\left[\frac{(1+0.05)^{6+1} - (1+0.05)}{0.05}\right]$$

$$\longrightarrow \quad M = 25000\left[\frac{(1.05)^{7} - (1.05)}{0.05}\right] = \$178{,}550.21$$

Si a nuestra fórmula:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}\right]$$

le sacamos al quebrado el factor común (1 + i), queda:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right](1+i)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(43)$$

Y si a la fórmula:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-(1+i)}{i}\right]$$

le hacemos la resta expresada en el numerador del quebrado:

$$M = R\,\frac{(1+i)^{n+1}-1-i}{i} \qquad\qquad M = R\,\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-\frac{i}{i}$$

se genera la fórmula siguiente:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(44)$$

Y si con los datos de nuestro ejercicio utilizamos las dos últimas fórmulas, obtenemos:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right](1+i)$$

$$M = 25000 \left[\frac{(1 + 0.05)^{6} - 1}{0.05} \right] (1 + 0.05) = \$178,550.21$$

$$M = R \left[\frac{(1 + i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right]$$

$$M = 25000 \left[\frac{(1 + 0.05)^{6+1} - 1}{0.05} - 1 \right] = \$178,550.21$$

Cálculo de la renta

De la fórmula del monto de las anualidades anticipadas:

$$M = R \left[\frac{(1 + i)^{n+1} - (1 + i)}{i} \right]$$

Luego, despejamos *R*:

$$R = \frac{Mi}{(1 + i)^{n+1} - (1 + i)} \quad \text{...(45)}$$

Ahora, apliquemos la fórmula.

Ejercicio 41. Se hacen 6 depósitos trimestrales anticipados (*n*) con una tasa del 20% capitalizable trimestralmente (*i*), ¿cuál será el monto de cada una de las rentas (*R*) si el monto total a obtener es $178,550.21 (*M*)?

R = ? trimestrales

I = 20% capitalizable trimestralmente = 0.20/4 = 0.05 trimestral
n = 6 trimestres

M = $178,550.21

$$R = \frac{178550.21*0.05}{(1+0.05)^{6+1} - (1+0.05)} = \$25,000.00$$

Cálculo del tiempo

De la fórmula del monto de las anualidades anticipadas despejamos *n*:

$$n = \frac{\log\left[\dfrac{Mi}{R\,(1+i)} + 1\right]}{\log\,(1+i)} \quad \text{...(46)}$$

Luego, aplicamos lo anterior en el ejercicio siguiente.

Ejercicio 42. ¿Cuántos depósitos trimestrales anticipados (*n*) de $25,000.00 (*R*), con una tasa de 20% capitalizable trimestralmente (*i*) se deben hacer para obtener un monto de $178,550.21 (*M*)?

M = $178,550.21

R = $25,000.00 trimestrales

i = 20% capitalizable trimestralmente = 0.20/4 = 0.05 trimestral

n = ? trimestres

$$n = \frac{\log\left[\dfrac{178550.21 * 0.05}{25000\,(1 + 0.05)} + 1\right]}{\log\,(1 + 0.05)} = \frac{0.1271357}{0.0211892} = 6 \text{ trimestre}$$

Cálculo de la tasa

De la fórmula del monto de anualidades anticipadas:

$$M = R\left[\frac{(1 + i)^{n + 1} - (1 + i)}{i}\right]$$

pasamos *R* al primer miembro:

$$\frac{M}{R} = \frac{(1 + i)^{n+1} - (1 + i)}{i}$$

En el ejercicio siguiente, realizamos el procedimiento para obtener la tasa de interés.

Ejercicio 43. ¿Cuál es la tasa de interés (*i*) si se realizan 6 depósitos trimestrales anticipados (*n*) de $25,000.00 (*R*) para obtener un monto de $178,550.21 (*M*)?

M = $178,550.21

R = $25,000.00 trimestrales

n = 6 trimestres

i = ?

Sustituimos:

$$\frac{178550.21}{25000} = \frac{(1+i)^{6+1} - (1+i)}{i} \longrightarrow 7.1420084 = \frac{(1+i)^{7} - (1+i)}{i}$$

Luego, probamos las tasas.

TASA	SUSTITUCIÓN	FACTOR
	$\frac{(1+i)^{7} - (1+i)}{i}$	
0.04	$\frac{(1+0.04)^{7} - (1+0.04)}{0.04}$	6.8982945
0.045	$\frac{(1+0.045)^{7} - (1+0.045)}{0.045}$	7.0191518
	7	

0.055	(1 + 0.055) – (1 + 0.055) -------------------------------- 0.055	7.2668938
0.06	7 (1 + 0.06) – (1 + 0.06) ------------------------------ 0.06	7.3938376

En diagrama:

7.2668938 7.1420084 7.0191518

|______________________________|______________________________|

| | |

0.055 ? 0.045

Con la fórmula de interpolación, queda:

$$\frac{\textit{Factor de la tasa buscada} - \textit{Factor de la tasa mayor}}{\textit{Factor de la tasa menor} - \textit{Factor de la tasa mayor}} = \frac{\textit{Tasa buscada} - \textit{Tasa mayor}}{\textit{Tasa menor} - \textit{Tasa mayor}}$$

$$\frac{7.1420084 - 7.2668938}{7.0191518 - 7.2668938} = \frac{i - 0.055}{0.045 - 0.055}$$

$$\frac{-0.1248854}{-0.247742} = \frac{i - 0.055}{-0.010} \qquad 0.5040945 = \frac{i - 0.055}{-0.010}$$

$\longrightarrow 0.5040945(-0.010) = i - 0.055 \qquad -0.0050409458 = i - 0.055$

$\longrightarrow -0.0050409458 + 0.055 = i \longrightarrow 0.049959 = i$

Entonces, la tasa que buscamos es de 0.05 (por el redondeo de cifras). Y si la sustituimos en el segundo miembro de la ecuación nos debe dar el mismo valor del factor del primer miembro de la ecuación. Comprobemos:

$$7.1420084 = \frac{(1+i)^{7} - (1+i)}{i} \longrightarrow 7.1420084 = \frac{(1.05)^{7} - (1.05)}{0.05}$$

$$7.1420084 = 7.1420084$$

Valor presente

Fórmula del valor presente:

$$C = R\,\frac{(1+i) - (1+i)^{-n+1}}{i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (47)$$

Ejercicio 44. ¿Cuál es el capital (*C*) de 6 depósitos trimestrales (*n*) de $25,000.00 (*R*) si se calculan con 20% compuesto trimestralmente (*i*)?

C = ?

R = $25,000.00 trimestrales

n = 6 trimestres

i = 20 % compuesto trimestralmente = 0.20/4 = 0.05 trimestral

$$C = 25000\left[\frac{(1 + 0.05) - (1 + 0.05)^{-6+1}}{0.05}\right] = \$133,236.92$$

De la fórmula del valor actual de anualidades anticipadas:

$$C = R\left[\frac{(1 + i) - (1 + i)^{-n+1}}{i}\right]$$

obtenemos el factor común:

$$C = R\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\right](1 + i) \ldots\ldots (48)$$

O, si hacemos la división, resulta:

$$C = R\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n+1}}{i} + 1\right] \ldots\ldots (49)$$

Comprobemos estas últimas fórmulas con los datos de nuestro ejercicio:

C = ?

R = $25,000.00 trimestrales

n = 6 trimestres

i = 20% compuesto trimestralmente = 0.20/4 = 0.05 trimestral

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i) \longrightarrow C = 25000\left[\frac{1-(1+0.05)^{-6}}{0.05}\right](1+0.05)$$

$$C = \$133,236.92$$

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}+1\right] \qquad C = 25000\left[\frac{1-(1+0.05)^{-6+1}}{0.05}+1\right]$$

$$C = \$133,236.92$$

CÁLCULO DE LA RENTA

De la fórmula del valor presente de las anualidades anticipadas:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{}+1\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(49)$$

despejamos *R*:

$$R = \frac{C}{\quad^{-n+1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(50)$$

$$\frac{1-(1+i)}{i}+1$$

Ejercicio 45. ¿De cuánto es cada uno (*R*) de 6 pagos trimestrales anticipados (*n*) que se deben realizar para liquidar una deuda de $133,236.92 (*C*), si se impone una tasa de interés de 20% compuesto trimestralmente (*i*)?

C = $133,236.92

n = 6 trimestres

i = 20 % compuesto trimestralmente = 0.20/4 = 0.05 trimestral

R = ? trimestrales

$$R = \frac{133236.92}{\dfrac{1-(1+0.05)^{-6+1}}{0.05}+1} = \$25,000.00$$

CÁLCULO DEL TIEMPO

De la fórmula del valor actual de las anualidades anticipadas:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i) \qquad (48)$$

despejamos *n*:

$$n = \frac{\log\left[\dfrac{R(1+i)}{R(1+i) - Ci}\right]}{\log(1+i)} \quad \text{...(51)}$$

Ejercicio 46. Calcular el número de pagos (*n*), de $25,000.00 cada uno (*R*), para liquidar una deuda de $133,236.92 (*C*) impuesta a una tasa del 20% compuesto trimestralmente (*i*).

C = $133,236.92

i = 20 % compuesto trimestralmente = 0.20/4 = 0.05 trimestral

R = $25,000.00 trimestrales

n = ? trimestres

$$n = \frac{\log\left[\dfrac{25000\,(1+0.05)}{25000(1+0.05) - (133236.92 * 0.05)}\right]}{\log(1+0.05)} = \frac{\log 1.3400957}{\log 1.05}$$

$$n = \frac{0.1271358}{0.0211892} = 6 \text{ trimestres}$$

CÁLCULO DE LA TASA DE INTERÉS

De la fórmula del valor actual:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i} + 1\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(49)$$

pasamos *R* al primer miembro:

$$\frac{C}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i} + 1$$

En el ejercicio siguiente, apliquemos el procedimiento de interpolación.

Ejercicio 47. ¿Qué tasa de interés (*i*) se aplicó a 6 pagos trimestrales (*n*), de $25,000.00 cada uno (*R*), para liquidar una deuda de $133,236.92 (*C*)?

C = $133,236.92

R = $25,000.00 trimestrales

n = 6 trimestres

i = ?

Sustituimos:

$$\frac{133236.92}{25000} = \frac{1-(1+i)^{-6+1}}{i} + 1 \longrightarrow 5.3294768 = \frac{1-(1+i)^{-5}}{i} + 1$$

Luego, probamos las tasas:

TASA	SUSTITUCIÓN	FACTOR
	$\frac{1-(1+i)^{-5}}{i}+1$	
0.04	$\frac{1-(1+0.04)^{-5}}{0.04}+1$	5.4518223
0.045	$\frac{1-(1+0.045)^{-5}}{0.045}+1$	5.3899767
0.055	$\frac{1-(1+0.055)^{-5}}{0.055}+1$	5.2702844
0.06	$\frac{1-(1+0.06)^{-5}}{0.06}+1$	5.2123637

En diagrama:

5.2702844 5.3294768 5.3899767

|________________________________|________________________________|

| | |

0.055 ? 0.045

Y si aplicamos la fórmula de interpolación:

$$\frac{\textit{Factor de la tasa buscada} - \textit{Factor de la tasa mayor}}{\textit{Factor de la tasa menor} - \textit{Factor de la tasa mayor}} = \frac{\textit{Tasa buscada} - \textit{Tasa mayor}}{\textit{Tasa menor} - \textit{Tasa mayor}}$$

$$\frac{5.3294768 - 5.2702844}{5.3899767 - 5.2702844} = \frac{i - 0.055}{0.045 - 0.055}$$

$$\frac{0.0591924}{0.1196923} = \frac{i - 0.055}{-0.010} \longrightarrow 0.4945380 = \frac{i - 0.055}{-0.010}$$

$$\longrightarrow 0.4945380(-0.010) = i - 0.055 \longrightarrow -0.00494538 = i - 0.055$$

$$\longrightarrow -0.00494538 + 0.055 = I \longrightarrow 0.050054619 = i$$

Finalmente, la tasa que buscamos es de 0.05 (por el redondeo de cifras). Y si la sustituimos en el segundo miembro de la ecuación, nos debe dar el mismo valor del factor del primer miembro de la ecuación. Comprobemos:

$$5.3294768 = \frac{1 - (1 + i)^{-5}}{i} + 1 \longrightarrow 5.3294768 = \frac{1 - (1.05)^{-5}}{0.05} + 1$$

$$5.3294768 = 5.3294768$$

3.4. Anualidades diferidas

Cuando la serie de pagos se inicia en alguna fecha futura, decimos que su pago se aplaza o se difiere. En este tipo de anualidades, hay dos tiempos:

a. Diferido o intervalo de aplazamiento, en el que no se realiza pago alguno. Se le llama *r*.
b. De percepción (*n*).

La gráfica siguiente ejemplifica el caso de anualidades ordinarias diferidas:

```
           .                                  R       R        R        R        R      R
   |_______|_______|_______|_______|_______|_______|_______|_______|_______|_____|
0          1         2         3         4          5         6         7         8          9     10


           1         2         3         4          1         2         3         4          5      6
|______________ ______________||_______________________________________|
                        |                                                    |
             Tiempo diferido                           Tiempo de percepción
```

Como se ve en el diagrama, el primer pago se realizará en una fecha futura, es decir, al terminar el quinto periodo, y durante cuatro periodos no se hace pago. Es evidente que éste es un caso de anualidades ordinarias diferidas.

MONTO DE LAS ANUALIDADES DIFERIDAS

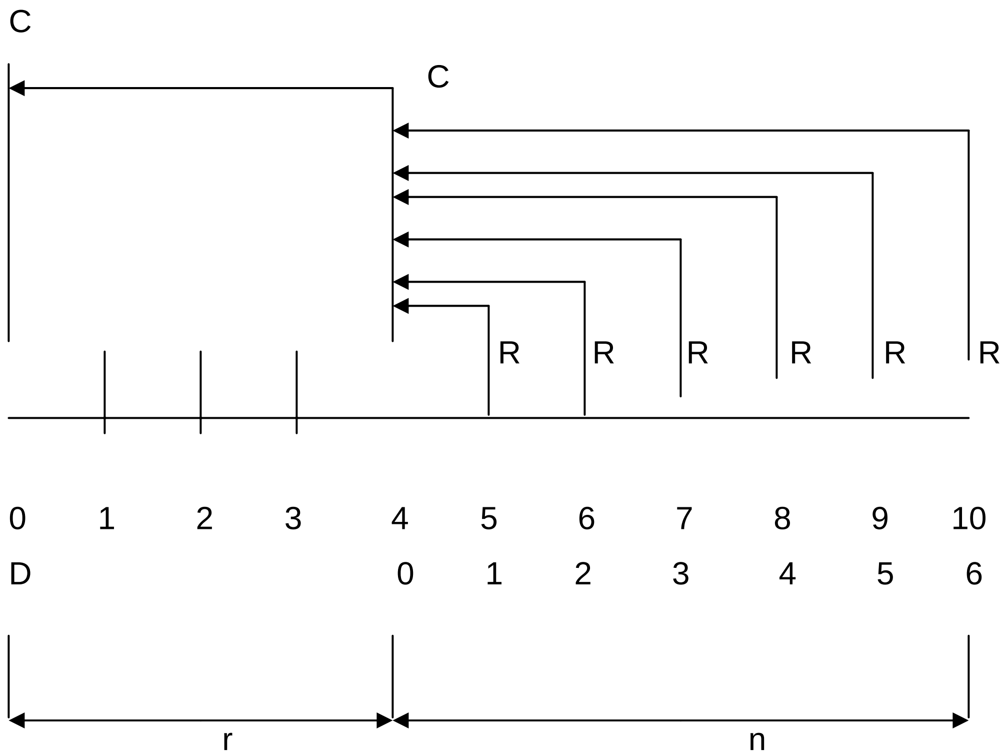
El monto de las anualidades diferidas vencidas es igual al de las anualidades ordinarias, en las mismas condiciones de importe de la renta, plazo o tiempo y tasa de interés. Esto se debe a que, durante el tiempo diferido, no se realiza ningún pago o depósito.

VALOR ACTUAL DE LAS ANUALIDADES VENCIDAS DIFERIDAS

El valor presente de las anualidades ordinarias coincide con la iniciación del tiempo de pago, en tanto que el valor actual de las anualidades diferidas se sitúa en el comienzo del tiempo diferido. En otras palabras, el valor actual de las anualidades diferidas se calcula a una fecha anterior de aquella a la cual se calcula el valor presente de las anualidades ordinarias. Así, en el ejemplo del diagrama, el valor actual de las anualidades diferidas se calcularía en el 0, en tanto que, si no existiera el tiempo diferido, y nos encontráramos frente a un caso de anualidades ordinarias, su valor actual se determinaría en el 4.

Para encontrar el valor actual de las anualidades diferidas, se puede calcular el valor presente como si se tratara de anualidades ordinarias, a la fecha en que se inicia el periodo de pago. Conocido ese valor, lo descontamos por el tiempo diferido, para regresarlo, en el tiempo, a la fecha de iniciación del periodo de aplazamiento.

Lo anterior, en forma de diagrama, se expresa de la siguiente manera:



Ahora bien, tomando el punto 4 como punto 0, tenemos que en el punto 0 está el valor actual de las anualidades ordinarias, que se deben descontar en *r* periodos, para encontrar el valor actual de las anualidades diferidas situadas en el punto D.

Por lo que, sabiendo que el valor presente de las anualidades ordinarias es:

$$C = R \left[\frac{1 - (1 + i)}{i} \right]^{-n} \qquad \text{..(35)}$$

el valor actual está en el punto 0.

Y obtenemos el valor presente en *r* periodos de este valor actual:

$$C = \frac{R\left[\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}{(1+i)^{r}}$$

Al simplificar, tenemos:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-r} \quad ó \quad C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{r} * i}\right] \text{……..………………..(38)}$$

Ejercicio 48. ¿Cuál es el valor actual diferido (*C*) de 6 (*n*) rentas mensuales, de $25,000.00 cada una (*R*), si se comienza a pagar al finalizar el quinto mes, a partir del día de hoy, y la tasa es del 24% convertible mensualmente (*i*)?

	.				R	R	R	R	R	R
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

En el diagrama se ve que el número de pagos que no se realizarán es 4, por lo que:

R = $25,000.00 mensuales

n = 6 mensualidades

r = 4 mensualidades

i = 24% convertible mensualmente = 0.24/12 = 0.02 mensual

C = ?

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-r} \longrightarrow C = 25000\left[\frac{1-(1.02)^{-6}}{0.02}\right](1.02)^{-4}$$

Por tanto:

C = $129,371.40

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{r} * i}\right] \longrightarrow C = 25000\left[\frac{1-(1.02)^{-6}}{(1.02)^{4} * 0.02}\right]$$

En consecuencia:

C = $129,371.40

Hagamos la comprobación aritmética:

Capital	$129,371.40
Intereses del primer mes	2,587.43
Monto al final del primer mes	131,958.83
Intereses del segundo mes	2,639.17
Monto al final del segundo mes	134,598.00
Intereses del tercer mes	2,691.96

Monto al final del tercer mes	137,289.96
Intereses del cuarto mes	2,745.80
Monto al final del cuarto mes	140,035.76
Intereses del quinto mes	2,800.71
Suma	142,836.47
Menos la primera renta	25,000.00
Capital al final del quinto mes	117,836.47
Intereses del sexto mes	2,356.73
Suma	120,193.20
Menos la segunda renta	25,000.00
Capital al final del sexto mes	95,193.20
Intereses del séptimo mes	1,903.87
Suma	97,097.07
Menos la tercera renta	25,000.00
Capital al final del séptimo mes	72,097.07
Intereses del octavo mes	1,441.94
Suma	73,539.01
Menos la cuarta renta	25,000.00
Capital al final del octavo mes	48,539.01
Intereses del noveno mes	970.78
Suma	49,509.79
Menos la quinta renta	25,000.00
Capital al final del noveno mes	24,509.79
Intereses del décimo mes	490.21
Suma	25,000.00
Menos la sexta renta	25,000.00
Al final del décimo mes	0.00

Lo anterior ha demostrado la exactitud del valor actual que hemos calculado.

CÁLCULO DE LA RENTA

Partimos de la fórmula del valor actual:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-r} \quad ó \quad C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{r} * i}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

Despejamos *R*:

$$\frac{C}{\left[\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-r}} = R \quad ó \quad \frac{C}{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{r} * i}} = R$$

Lo que es igual a:

$$\left[\frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}\right](1+i)^{r} = R \quad ó \quad \frac{C * (1+i)^{r} * i}{1-(1+i)^{-n}} = R \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\ 39\ )$$

Ejercicio 49. ¿Cuáles son las rentas mensuales de 6 (*n*) para liquidar una deuda de \$129,371.40, comenzando a pagar al finalizar el quinto mes, a partir del día de hoy, con una tasa de 24% convertible mensualmente (*i*)?

R = ? mensuales
n = 6 mensualidades
r = 4 mensualidades
i = 24% convertible mensualmente = 0.24/12 = 0.02 mensual
C = \$129,371.40

$$\left[\frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}\right](1+i)^{r} = R \qquad \text{ó} \qquad \frac{C * (1+i)^{r} * i}{1-(1+i)^{-n}} = R$$

$$\left[\frac{129371.40(0.02)}{1-(1.02)^{-6}}\right](1.02)^{4} = R \qquad \text{ó} \qquad \frac{129371.40\,(1.02)^{4}\,(0.02)}{1-(1.02)^{-6}} = R$$

De lo que resulta:

25,000.00 = R ó *25,000.00 = R*

CÁLCULO DEL TIEMPO DE PERCEPCIÓN

De la fórmula del valor actual:

$$C = R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{(1 + i)^{r} * i} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

pasamos *R* al primer miembro:

$$\frac{C}{R} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{(1 + i)^{r} * i}$$

y colocamos el denominador del segundo miembro en el primer miembro:

$$\frac{C\,[(1 + i)^{r} * i]}{R} = 1 - (1 + i)^{-n}$$

Lo que se puede escribir así:

$$\frac{C\,[(1 + i)^{r} * i]}{R} = 1 - \frac{1}{(1 + i)^{n}}$$

Luego, cambiamos el 1 al primer miembro

$$\frac{C\,[(1+i)^{r} * i]}{R} - 1 = -\frac{1}{(1+i)^{n}}$$

Obtenemos el común denominador del primer miembro:

$$\frac{C\,[(1+i)^{r} * i] - R}{R} = -\frac{1}{(1+i)^{n}}$$

Cambiamos los signos:

$$\frac{R - C\,[(1+i)^{r} * i]}{R} = \frac{1}{(1+i)^{n}}$$

Luego, invertimos la igualdad:

$$\frac{R}{R - C\,[(1+i)^{r} * i]} = (1+i)^{n}$$

Aplicamos logaritmos:

$$\log R - \log \{R - C\,[(1 + i) * i]\}^{r} = n \log(1 + i)$$

Y al despejar *n*, tenemos:

$$n = \frac{\log R - \log \{R - C\,[(1 + i) * i]\}^{r}}{\log (1 + i)} \qquad (40)$$

Como es muy laboriosa esta fórmula de aplicación y se basa en la relación entre las anualidades diferidas con las ordinarias, se recomienda, para calcular el tiempo, lo siguiente:

a. Calculamos el monto del valor actual de las anualidades diferidas vencidas por el tiempo diferido, para obtener el valor actual de las anualidades ordinarias.
b. Al conocer el dato del punto anterior, se calcula el tiempo de percepción, utilizando la fórmula del tiempo de anualidades ordinarias.

Apliquemos ambos procedimientos en los ejercicios siguientes.

Ejercicio 50. ¿Cuál es el número (*n*) de rentas mensuales de $25,000.00 cada una (*R*), si se inicia a pagar al finalizar el quinto mes, a partir del día de hoy, para liquidar una deuda de $129,371.40 (*C*), con una tasa de 24% convertible mensualmente (*i*)?

R = $25,000.00 mensuales

n = ? mensualidades

r = 4 mensualidades

i = 24% convertible mensualmente = 0.24/12 = 0.02 mensual

C = $129,371.40

Por fórmula:

$$n = \frac{\log R - \log \{R - C[(1 + i)^{r} * i]\}}{\log (1 + i)}$$

$$n = \frac{\log 25000 - \log \{25000 - 129371.40[(1.02)^{4} * 0.02]\}}{\log (1.02)}$$

$$n = \frac{0.051601}{0.008600} \longrightarrow n = 6 \text{ mensualidades}$$

POR RELACIÓN:

a)

$C = \$129,371.40$	$M = C(1 + i)^{n} = C(1 + i)^{r}$
$r = 4$ meses	
$i = 0.02$ mensual	
$M = ?$	$M = 129371.40(1.02)^{4} = \$140,035.76$

b)

$C = \$140,035.76$

$i = 0.02$ *mensual*

$R = \$25,000.00$ *mensuales*

$n = ?$ *mensualidades*

$$n = -\frac{\log\left[1 - \frac{Ci}{R}\right]}{\log(1 + i)}$$

$$n = -\frac{\log\left[1 - \frac{140035.76(0.02)}{25000}\right]}{\log(1.02)} = -\frac{-0.051601}{0.008600} = 6$$

Entonces:

n = 6 mensualidades

CÁLCULO DEL TIEMPO DIFERIDO

Una vez despejada la literal *r*, la fórmula queda así:

$$r = \frac{\log R + \log\left[1 - (1 + i)^{-n}\right] - \log(Ci)}{\log(1 + i)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(41)$$

Se hace la misma anotación que en el tiempo de percepción, por lo que se recomienda:

Calcular el valor actual de las anualidades, como si fueran ordinarias.
Al valor calculado en el punto anterior se le considera como el monto del valor actual de nuestros datos; así, se determina el tiempo diferido a partir de la fórmula del monto de interés compuesto.

Ejercicio 51. ¿Cuál es el tiempo diferido (*r*) de 6 rentas mensuales (*n*), de $25,000.00 cada una (*R*), a partir del día de hoy, para liquidar una deuda de $129,371.40 (*C*), con una tasa del 24% convertible mensualmente (*i*)?

C = $129,371.40
R = $25,000.00 mensuales
i = 24% convertible mensualmente = 0.24/12 = 0.02 mensual
n = 6 mensualidades
r = ? meses

Por fórmula:

$$r = \frac{\log R + \log\left[1 - (1+i)^{-n}\right] - \log(Ci)}{\log(1+i)}$$

$$r = \frac{\log 25000 + \log\left[1 - (1+0.02)^{-6}\right] - \log(129371.40 * 0.02)}{\log(1+0.02)}$$

$$r = \frac{0.0344007}{0.0086001} = 4 \text{ meses}$$

Por relación:

a)

R = \$25,000.00 mensuales

i = 0.02 mensual

n = 6 mensualidades

C = ?

$$C = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 25000\,\frac{1-(1.02)^{-6}}{0.02} = \$140{,}035.77$$

b)

M = \$140,035.77

C = \$129,371.40

i = 0.02 mensual

r = ? meses

$$n = \frac{\log(M/C)}{\log(1+i)} \longrightarrow r = \frac{\log(M/C)}{\log(1+i)}$$

$$r = \frac{\log\ (140035.77/129371.40)}{\log(1.02)} = \frac{0.0344007}{0.0086001} = 4 \text{ meses}$$

CÁLCULO DE LA TASA DE INTERÉS

De la fórmula del valor actual:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{r} * i}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

pasamos al primer miembro a *R*:

$$\frac{C}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{r} * i}$$

Se debe tomar en cuenta que el primer miembro va a ser un resultado igual al segundo miembro de la ecuación, cuyo factor se obtendrá por interpolación. (Véase el apartado de anualidades ordinarias).

Ejercicio 52. ¿Cuál es la tasa de interés (*i*) de 6 (*n*) de rentas mensuales de $25,000.00 cada una (*R*), para liquidar una deuda de $129,371.40 (*C*), si se inicia a pagar al finalizar el quinto mes, a partir del día de hoy?

C = $129,371.40

R = $25,000.00 mensuales

n = 6 mensualidades

r = 4 meses

i = ? mensual

$$\frac{C}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{r} * i}$$

Sustituimos:

$$\frac{129371.40}{25000} = \frac{1-(1+i)^{-6}}{(1+i)^{4} * i} \longrightarrow 5.174856 = \frac{1-(1+i)^{-6}}{(1+i)^{4} * i}$$

Luego, probamos las tasas:

TASA	SUSTITUCIÓN	FACTOR
	$\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{r} * i}$	
0.01	$\frac{1-(1+0.01)^{-6}}{(1+0.01)^{4} * 0.01}$	5.569339

0.015	$\dfrac{1-(1+0.015)^{-6}}{(1+0.015)^{4} * 0.015}$	5.3677999
0.025	$\dfrac{1-(1+0.025)^{-6}}{(1+0.025)^{4} * 0.025}$	4.9900897
0.03	$\dfrac{1-(1+0.03)^{-6}}{(1+0.03)^{4} * 0.03}$	4.8131044

Y, expresado en diagrama, queda:

```
4.9900897                    5.174856                    5.3677999
   |_____________________________|_____________________________|
|                              |                              |
 0.025                           ?                          0.015
```

Y con la fórmula de interpolación:

$$\frac{\textit{Factor de la tasa buscada} - \textit{Factor de la tasa mayor}}{\textit{Factor de la} - \textit{Factor de la}} = \frac{\textit{Tasa buscada} - \textit{Tasa mayor}}{\textit{Tasa menor} - \textit{Tasa mayor}}$$

tasa menor *tasa mayor*

$$\frac{5.174856 - 4.9900897}{5.3677999 - 4.9900897} = \frac{i - 0.025}{0.015 - 0.025}$$

$$\frac{0.1847663}{0.3777102} = \frac{i - 0.025}{-0.010} \rightarrow 0.4891747 = \frac{i - 0.025}{-0.010}$$

$$\rightarrow 0.4891747(-0.010) = i - 0.025 \rightarrow -0.0048917477 = i - 0.025$$

$$\rightarrow -0.0048917477 + 0.025 = i \rightarrow 0.02010 = i$$

Entonces, la tasa que buscamos es de 0.02 (por el redondeo de cifras). Y si la sustituimos en el segundo miembro de la ecuación, debe dar el mismo valor del factor del primer miembro de la ecuación. Comprobemos:

$$5.174856 = \frac{1 - (1 + i)^{-6}}{(1 + i)^{4} * i} \rightarrow 5.174856 = \frac{1 - (1.02)^{-6}}{(1.02)^{4} * 0.02}$$

$$5.174856 = 5.174856$$

3.5. Caso general de anualidades

En todos los problemas resueltos hasta el momento, los periodos de capitalización han coincidido con los de pago. Es decir, para rentas trimestrales consideramos la tasa trimestral; para pagos mensuales, tasas mensuales, y así sucesivamente. Sin embargo, hay casos en que los periodos de pago no coinciden con los de capitalización. En estas circunstancias, lo primero que se debe hacer es unificar la tasa de interés a los periodos de pago: si los pagos son semestrales, la tasa de interés también debe estar en forma semestral, y así sucesivamente. Precisamente estos problemas son considerados en las anualidades generales.

Antes de revisar el procedimiento que debe seguirse, recordemos lo visto en interés compuesto, respecto de las tasas equivalentes. En ese apartado, utilizamos los símbolos siguientes:

e = Tasa real o efectiva anual.
J = Tasa nominal anual.
m = Número de capitalizaciones por año (frecuencia de conversión de "j")
i = Tasa nominal anual.
p = Número de capitalizaciones por año (frecuencia de conversión de "i")

Y las fórmulas:

$$J = [(1 + i/p)^{p/m} - 1]m \quad \text{………………………………………………………}(28)$$

$$J = [(1 + e)^{1/m} - 1]m \quad \text{………………………………………………………}(29)$$

$$e = (1 + J/m)^{m} - 1 \quad \text{………………………………………………………}(30)$$

Luego, para solucionar los casos generales de anualidades, se debe hacer lo siguiente:

a. Determinar las tasas equivalentes, para que tanto la tasa de interés como los pagos estén en la misma unidad de tiempo.
b. Manejar el problema como una anualidad simple y utilizar la fórmula respectiva, según la anualidad que corresponda el ejercicio.

Ejercicio 53. ¿Cuál es la cantidad acumulada (*M*) de 12 depósitos bimestrales anticipados (*n*) de $5,000.00 (*R*), si se invierten con el 16% convertible trimestralmente (*i*)?

R = $5,000.00 semestrales

n = 12 bimestres

i = 16% convertible trimestralmente = 0.16 / 4 = 0.04 trimestral = 4% trimestral

M = ? de anualidades anticipadas

a. Se busca la tasa bimestral:

Utilizamos los símbolos:

J = ? = Tasa nominal anual.

m = 6 = Número de capitalizaciones por año (frecuencia de conversión de "j")

i = 16% = 0.16 = Tasa nominal anual

p = 4 = Número de capitalizaciones por año (frecuencia de conversión de “i”)

Y se aplica la fórmula:

$J = [(1 + i/p)^{p/m} – 1]m$ ……………………………………………………………………(28)

4/6

J = [(1 + 0.16/4) - 1]6 = 0.158951865 = 15.8951865% convertible bimestralmente

Entonces, los nuevos datos son:

R = $5,000.00 semestrales
n = 12 bimestres
i = 15.8951865% convertible trimestralmente = 0.15.8951865 / 6 = 0.026491077 bimestral = 2.6491077% bimestral
M = ? de anualidades anticipadas

b. Ahora, con la fórmula del monto de anualidades anticipadas:

$$M = R \left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(42)$$

Finalmente, sustituimos los nuevos datos:

$$M = 5000 \left[\frac{(1+0.026491077)^{12+1} - (1+0.026491077)}{0.026491077} \right] = \$71,404.81$$